معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر

صورت کلی معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه nام بصورت زیر می‌باشد:

$$a_n(x)\, y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = g(x) \qquad \text{I}$$

که در آن $a_i(x)$ ، $i=0,1,2,\ldots,n$ توابعی برحسب x هستند که در بازه بسته $[a,b]$ تعریف شده و پیوسته نیز می‌باشد. همچنین $a_n(x) \neq 0$.

اگر $g(x)=0$ آنرا همگن و اگر $g(x) \neq 0$ آنرا غیرهمگن می‌گوئیم. (در فصل قبل توضیح داده شد)

عملگر: یک عامل ریاضی است که از یک عنصر ریاضی عنصر دیگری را می‌سازد مانند: انتگرال ـ مشتق و ...

عملگر دیفرانسیل D: اگر یک ترکیب خطی از عملگرهای دیفرانسیل از مرتبه D^n را تشکیل دهیم آنرا با L نشان خواهیم داد. اگر L بر روی تابعی مانند y که حداقل تا مرتبه nام مشتق داشته باشد اثر کند عبارت زیر را خواهیم داشت

$$L = a_n(x) D^n + a_{n-1}(x) D^{n-1} + \cdots + a_1(x) D + a_0(x)$$

$$Ly = \left(a_n(x) D^n + a_{n-1}(x) D^{n-1} + \cdots + a_1(x) D + a_0(x)\right) y$$

$$Ly = a_n(x) D^n y + a_{n-1}(x) D^{n-1} y + \cdots + a_1(x) D y + a_0(x) y$$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را با تشکیل یک عملگر مناسب بصورت Ly بنویسید؟

$$2x\, y''' + (e^x - \sin x)\, y'' + y' = 0$$

حل:

$$2x D^3 y + (e^x - \sin x) D^2 y + D y = 0$$

ص ۳۱

اگر y_1 و y_2 و ... و y_n ، n تا جواب معادله دیفرانسیل همگن (I) باشد دراینصورت جواب بصورت $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \dots + c_n y_n$ می باشد.

اگر y_1 و y_2 و ... و y_n را که در بازه $[a,b]$ تعریف شده اند بتوان همه آنها را برحسب مضربی از یکدیگر بیان کرد که غیرصفر بوده و جمع آنها صفر باشد وابسته خطی می گوئیم. یعنی

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = 0 \quad \circledast$$

اگر c_iها غیرصفر باشند وابسته خطی گوئیم

اگر c_iها فقط با صفر بودن رابطه $\circledast$ را تبدیل به صفر کنند به آنها مستقل خطی می گوئیم.

مثال: آیا $y_1 = 2x^3$ و $y_2 = 4x^3$ و $y_3 = 7x^3$ مستقل خطی هستند یا وابسته خطی؟

$$c_1\, 2x^3 + c_2\, 4x^3 + c_3\, 7x^3 = 0$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)(2x^3) + (-2)(4x^3) + (1)(7x^3) = 0$$

چون c_iهای غیرصفر پیدا شد که رابطه برقرار شد لذا وابسته خطی هستند.

لازم بذکر دراین قسمت درس تمام جوابهای معادله دیفرانسیل مستقل خطی هستند.

در معادله دیفرانسیل همگن مرتبه n ام (I) اگر y_1 و y_2 و ... و y_n جوابهای مستقل خطی از معادله (I) باشند در اینصورت جواب عمومی همگن معادله دیفرانسیل فوق برابر است با:

$$y_g = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

علیرضا رکنی ص ۳۲

قضیه: اگر توابع $y_1, y_2, \ldots, y_n$ جواب های مستقل خطی معادله دیفرانسیل خطی همگن روی $[a,b]$ باشند آنگاه

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

رونسکلینی

در هیچ نقطه ای از $[a,b]$ نمی تواند صفر باشد.

تذکر: اگر $y_1, y_2, \ldots, y_n$ وابسته خطی باشند آنگاه رونسکلینی آنها صفر است

عکس این قضیه درست نیست اما عکس نقیض این قضیه درست است یعنی:

اگر دترمینان مخالف صفر باشد آنگاه $y_1, y_2, \ldots, y_n$ مستقل خطی هستند.

مثال: آیا $y_1 = e^{r_1 x}$ و $y_2 = e^{r_2 x}$ و $y_3 = e^{r_3 x}$ مستقل خطی هستند؟

$$w(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & e^{r_3 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} & r_3 e^{r_3 x} \\ r_1^2 e^{r_1 x} & r_2^2 e^{r_2 x} & r_3^2 e^{r_3 x} \end{vmatrix} = e^{r_1} e^{r_2} e^{r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

پس مستقل هستند.

مثال: نشان دهید $y_1 = e^{x}$ و $y_2 = e^{2x}$ و $y_3 = e^{3x}$ جواب هایی از معادله دیفرانسیل

$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ است؟

$$w(x) = \begin{vmatrix} e^{x} & e^{2x} & e^{3x} \\ e^{x} & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^{x} & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = e^{x} e^{2x} e^{3x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = e^{6x}(6-6+2)$$

$$= 2e^{6x} \neq 0$$

معادلات دیفرانسیل همگن خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت

برای حل این معادلات ابتدا آنرا بفرم عملگر Dy می‌نویسیم سپس بجای آن از r استفاده می‌کنیم

در اینصورت خبری از مشتقات نخواهد بود و معادله بفرم یک معادله درجه دوم ریاضی برحسب r

بدست می‌آید که با بدست آوردن ریشه‌های آن می‌توان به شکلی به جواب مورد نظر رسید.

لازم بذکر است به r مفسر می‌گوئیم

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را برحسب معادله مفسر حل کرده و ریشه‌های آن را بیابید

الف) $y'' + 5y' + 6y = 0$

حل: $D^2y + 5Dy + 6y = 0$

$(D^2 + 5D + 6)y = 0$

$D^2 + 5D + 6 = 0$

$\underbrace{r^2 + 5r + 6 = 0}_{\text{معادله مفسر}} \Rightarrow (r+2)(r+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = -2 \\ r_2 = -3 \end{cases}$

ب) $y'' - y' - 6y = 0$

و از این به بعد بجای مشتقات r می‌گذاریم و از نوشتن y صرف نظر می‌کنیم

$\xrightarrow{\text{مستقیماً}} r^2 - r - 6 = 0$

$(r-3)(r+2) = 0 \longrightarrow r_1 = 3$

$r_2 = -2$

فرم کلی معادلات دیفرانسیل همگن خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت بصورت $y''+a(x)y'+b(x)=0$ می‌باشد.

برای حل این معادلات ابتدا معادله مشخصه مربوط را بدست آورده و سپس ریشه‌های این معادله را بدست می‌آوریم که سه حالت رخ می‌دهد.

الف)

$$\text{if } \Delta>0 \rightarrow \text{دو ریشه متمایز دارد } r_1\neq r_2 \rightarrow \text{جواب عمومی همگن } y_g=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}$$

مثال:

$$y''-2y'-3y=0$$

حل:

$$r^2-2r-3=0 \rightarrow (r-3)(r+1)=0 \rightarrow r_1=3,\ r_2=-1 \rightarrow y_g=c_1e^{3x}+c_2e^{-x}$$

ب)

$$\text{if } \Delta=0 \rightarrow \text{ریشه مضاعف دارد } r_1=r_2 \rightarrow \text{جواب عمومی همگن } y_g=c_1e^{r_1x}+c_2xe^{r_1x}$$

مثال:

$$y''-2y'+y=0$$

حل:

$$r^2-2r+1=0 \rightarrow (r-1)^2=0 \rightarrow (r-1)(r-1)=0$$

$$r_1=1,\ r_2=1 \Rightarrow y_g=c_1e^{x}+c_2xe^{x}$$

ج)

$$\text{if } \Delta<0 \rightarrow \text{ریشه مختلط دارد } r=\alpha\pm\beta i \rightarrow \text{جواب عمومی همگن } y_g=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$$

مثال:

$$y''+y'+y=0$$

حل:

$$r^2+r+1=0 \rightarrow r=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(1)}}{2(1)}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$$

$$\rightarrow r=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2} \Rightarrow r=\underbrace{-\frac{1}{2}}_{\alpha}\pm\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\beta}i$$

$$y_g=e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

علیرضا رستمی ص ۳۵

مثال :

$$y''' + y'' - 2y = 0$$

حل ; $r^3 + r^2 - 2 = 0 \longrightarrow (r-1)(r^2+2r+2) = 0 \rightarrow r = 1, \quad r = -1 \pm i$

$$y_g = c_1 e^{x} + e^{-x}(c_2 \cos x + c_3 \sin x)$$

$$y''' - 3y' + 2y = 0$$

حل : $r^3 - 3r + 2 = 0 \longrightarrow (r+2)(r-1)^2 = 0 \rightarrow r_1 = r_2 = 1, \quad r_3 = 2$

$$y_g = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 e^{2x}$$

$$y''' + 2y'' = 0$$

حل : $r^3 + 2r^2 = 0 \longrightarrow r^2(r+2) = 0 \rightarrow r_1 = r_2 = 0, \quad r_3 = -2$

$$y_g = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-2x}$$

$$y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0$$

حل : $r^3 - 2r^2 - 4r + 8 = 0 \longrightarrow (r-2)^2(r+2) = 0 \rightarrow r_1 = r_2 = 2, \quad r_3 = -2$

$$y_g = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 e^{-2x}$$

علیرضا [illegible] ص ۳۶

تعمیم به مراتب بالاتر

برای حل معادلات مرتبه سوم و چهارم و ... هم مثل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم عمل می‌کنیم

الف) متمایز باشند $r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq \dots \neq r_n \xrightarrow{\text{جواب عمومی همگن}} y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$

مثال:

$$y''' - 7y' + 6y = 0$$

حل: $r^3 - 7r + 6 = 0 \rightarrow (r-1)(r-2)(r+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 2 \\ r_3 = -3 \end{cases}$

$$y_g = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-3x}$$

ب) برابر باشند $r_1 = r_2 = r_3 = \dots = r_n \xrightarrow{\text{جواب عمومی همگن}} y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_2 x} + \dots + c_n x^{n-1} e^{r_n x}$

مثال:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

حل: $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0 \rightarrow (r-1)^3 = 0 \rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = 1 \\ r_3 = 1 \end{cases}$

$$y_g = c_1 e^{x} + c_2 x e^{x} + c_3 x^2 e^{x}$$

ج) $r = \alpha_1 \pm \beta_1 i, \dots, \alpha_n \pm \beta_n i$

$$\rightarrow y_g = e^{\alpha_1 x}\left(c_1 \cos(\beta_1 x) + k_1 \sin(\beta_1 x)\right) + \dots + e^{\alpha_n x}\left(c_n \cos(\beta_n x) + k_n \sin(\beta_n x)\right)$$

این حالت معمولاً بوجود نمی‌آید

تذکر: احتمال دارد ریشه‌های معادله ترکیبی از سه نوع معادله با ریشه‌های متفاوت باشد

معادلات دیفرانسیل خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت

حالت کلی این معادلات بفرم $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$

که در آن $g(x)$ مخالف صفر است.

برای حل این نوع معادلات سه روش کلی وجود دارد

الف) روش ضرایب نامعین

ب) روش عملگر D

ج) روش عملگر اپراتور معکوس

لازم بذکر است در حالت های مختلف $f(x)$ شامل چندجمله ای - نمایی - مثلثاتی و یا حاصلضرب آنها در یکدیگر می باشد.

در حالت کلی برای حل آنها ابتدا $g(x)$ را مساوی صفر قرار می دهیم و معادله را تبدیل به معادلات دیفرانسیل خطی همگن کرده و معادله مشخصه را پیدا میکنیم و جواب عمومی همگن را بوسیله روشهای قبلی گفته بدست می آوریم سپس از حالتهای که بعداً گفته میشود جواب خصوصی معادله را بدست می آوریم و آنرا با y_p نمایش میدهیم سپس جواب های عمومی همگن و جواب خصوصی را با هم جمع میکنیم یعنی

$$y = y_g + y_p$$

نکته: کنکوریها از روش عملگر اپراتور معکوس میتوان در کنکور برای سرعت بیشتر استفاده کرد.

الف) روش ضرایب نامعین

۱ اگر $f(x) = k_0 + k_1x + k_2x^2 + \dots + k_nx^n$ یک چند جمله‌ای از درجه n باشد آنگاه

اگر ریشه ها مخالف صفر باشد

$$y_p = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n$$

اگر ریشه ها برابر صفر با مرتبه تکرار t باشد

$$y_p = x^t(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n)$$

مثال:

$$y''' - 3y' + 2y = 2x^2 + 1$$

حل:

$$r^3 - 3r + 2 = 0 \rightarrow (r+2)(r-1)^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} r_1 = r_2 = +1 \\ r_3 = -2 \end{cases}$$

$$y_g = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-2x}$$

جواب عمومی همگن

چون معادله غیرهمگن و چند جمله‌ای است درجه آن ۲ و ریشه ها مخالف صفر است از حالت اول برای بدست آوردن جواب خصوصی استفاده می‌کنیم

$$y_p = A_0 + A_1x + A_2x^2$$

به تعداد مرتبه معادله از جواب خصوصی مشتق می‌گیریم و آنرا در معادله قرار می‌دهیم تا ضرایب مجهول بدست بیایند.

$$y'_p = A_1 + 2A_2x$$

$$y''_p = 2A_2$$

$$y'''_p = 0$$

$$0 - 3(A_1 + 2A_2x) + 2(A_0 + A_1x + A_2x^2) = 2x^2 + 1$$

$$2A_2x^2 + (2A_1 - 6A_2)x + (2A_0 - 3A_1) = 2x^2 + 1$$

$$\begin{cases} 2A_2 = 2 \Rightarrow A_2 = 1 \\ 2A_1 - 6A_2 = 0 \Rightarrow A_1 = 3 \\ 2A_0 - 3A_1 = 1 \Rightarrow A_0 = 5 \end{cases} \Rightarrow y_p = 5 + 3x + x^2$$

جواب خصوصی

$$y = y_g + y_p = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-2x} + 5 + 3x + x^2$$

مثال : $y'' - y' = 2x - 1$

حل : $r^2 - r = 0 \rightarrow r(r-1) = 0 \rightarrow r = 0 ,\ r = 1$

$$y_g = c_1 + c_2 e^x$$

چون یکی از ریشه‌ها صفر با مرتبه تکرار ۱ از حالت دوم استفاده می‌کنیم

$$y_p = x^1 (A_0 + A_1 x) \rightarrow y_p = A_0 x + A_1 x^2$$

$$y_p' = A_0 + 2A_1 x$$

$$y_p'' = 2A_1$$

$$2A_1 - (A_0 + 2A_1 x) = 2x - 1$$

$$-2A_1 x + (2A_1 - A_0) = 2x - 1$$

$$\begin{cases} -2A_1 = 2 \Rightarrow A_1 = -1 \\ 2A_1 - A_0 = -1 \Rightarrow A_0 = -1 \end{cases}$$

$$y_p = x(-1 - x) \Rightarrow y_p = -x - x^2$$

$$y = y_g + y_p = c_1 + c_2 e^x - x - x^2$$

۲ اگر $f(x)=ke^{\alpha x}$ یک تابع نمایی باشد

اگر α ریشه معادله مشخصه (مفسر) نباشد $\qquad y_p = Ae^{\alpha x}$

اگر α ریشه معادله مشخصه با مرتبه تکرار t باشد $\qquad y_p = x^t(Ae^{\alpha x})$

مثال:

$$y''' + 8y = 2e^{2x}$$

حل: $r^3+8=0 \rightarrow (r+2)(r^2-2r+4)=0 \rightarrow r_1=-2 \quad r_2 = 1 \pm \sqrt{3}\, i$

$$y_g = c_1 e^{-2x} + e^{x}\left(c_2 \cos(\sqrt{3}x) + c_3 \sin(\sqrt{3}x)\right)$$

در این مثال $\alpha = 2$ برابر با ریشه‌های معادله مفسر نیست لذا از حالت اول استفاده می‌کنیم

$$y_p = Ae^{2x}$$

مانند روش چند جمله‌ای‌ها به تعداد مرتبه معادله مشتق می‌گیریم و در معادله جایگذاری می‌کنیم تا جواب خصوصی بدست آید.

$$y'_p = 2Ae^{2x}$$

$$y''_p = 4Ae^{2x}$$

$$y'''_p = 8Ae^{2x}$$

$$8Ae^{2x} + 8Ae^{2x} = 2e^{2x}$$

$$16Ae^{2x} = 2e^{2x}$$

$$16A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{8} \rightarrow y_p = \frac{1}{8}e^{2x}$$

$$y = y_g + y_p = c_1 e^{-2x} + e^{x}\left(c_2 \cos(\sqrt{3}x) + c_3 \sin(\sqrt{3}x)\right) + \frac{1}{8}e^{2x}$$

ص ۴۱

مثال: $4y'' + 4y' + y = e^{-\frac{1}{2}x}$

حل: $4r^2 + 4r + 1 = 0 \rightarrow (2r+1)^2 = 0 \rightarrow r_1 = r_2 = -\frac{1}{2}$

$$y_g = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{1}{2}x}$$

چون $\alpha = -\frac{1}{2}$ برابر با ریشه معادله مشخصه با مرتبه تکرار ۲ است از حالت دوم استفاده می‌کنیم

$$y_p = x^2 A e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$y_p' = 2Ax e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2} A x^2 e^{-\frac{1}{2}x} = \left(2Ax - \frac{1}{2} A x^2\right) e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$y_p'' = (2A - Ax) e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}\left(2Ax - \frac{1}{2} A x^2\right) e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$y_p'' = \left(2A - 2Ax + \frac{1}{4} A x^2\right) e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$4\left(2A - 2Ax + \frac{1}{4} A x^2\right) e^{-\frac{1}{2}x} + 4\left(2Ax - \frac{1}{2} A x^2\right) e^{-\frac{1}{2}x} + x^2 A e^{-\frac{1}{2}x} = e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\left(8A \cancel{- 8Ax} \cancel{+ Ax^2} \cancel{+ 8Ax} \cancel{- 2Ax^2} \cancel{+ x^2 A}\right) e^{-\frac{1}{2}x} = e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$8A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{8}$$

$$y_p = \frac{1}{8} x^2 e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$y = y_g + y_p = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{x^2}{8} e^{-\frac{1}{2}x}$$

علیرضا رستمی ص ٤٢

۳- اگر $f(x) = k_1\sin\beta x + k_2\cos\beta x$ یک مثلثاتی باشد آنگاه،

اگر βi ریشه‌های معادله مشخصه نباشد

$$y_p = A_1\sin\beta x + A_2\cos\beta x$$

اگر βi ریشه‌های معادله مشخصه با مرتبه تکرار t باشد

$$y_p = x^t\left(A_1\sin\beta x + A_2\cos\beta x\right)$$

مثال:

$$y'' + 4y' + 3y = 2\cos(\underbrace{2}_{\beta}x)$$

$$\text{م:}\quad r^2 + 4r + 3 = 0 \longrightarrow (r+3)(r+1) = 0 \longrightarrow r=-3,\; r=-1$$

$$y_g = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x}$$

چون $\beta = 2$ و $\beta i = 2i$ برابر ریشه‌های معادله مشخصه نیست از حالت اول استفاده می‌کنیم

تا ۲ مرتبه به تعداد مرتبه معادله مشتق گرفته در معادله دیفرانسیل جایگذاری می‌کنیم

$$y_p = A_1\sin(2x) + A_2\cos(2x)$$

$$y_p' = 2A_1\cos(2x) - 2A_2\sin(2x)$$

$$y_p'' = -4A_1\sin(2x) - 4A_2\cos(2x)$$

$$= 2\cos 2x$$

$$-4A_1\sin(2x) - 4A_2\cos(2x) + 4\left(2A_1\cos(2x) - 2A_2\sin(2x)\right) + 3\left(A_1\sin 2x + A_2\cos 2x\right)$$

$$(-4A_1 - 8A_2 + 3A_1)\sin 2x + (-4A_2 + 8A_1 + 3A_2)\cos 2x = 2\cos 2x$$

$$8\begin{cases} -A_1 - 8A_2 = 0 \\ 8A_1 - A_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} -8A_1 - 64A_2 = 0 \\ 8A_1 - A_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow 65A_2 = 2 \Rightarrow A_2 = \frac{-2}{65}, \quad A_1 = \frac{14}{65}$$

$$y_p = \frac{14}{65}\sin(2x) - \frac{2}{65}\cos(2x)$$

$$y = y_g + y_p = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-x} + \frac{16}{65}\sin(2x) - \frac{2}{65}\cos(2x)$$

مثال:

$$y'' + 9y = \sin 3x - \cos 3x \longrightarrow \beta$$

حل: $r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{-9} \Rightarrow r = 0 \pm \sqrt{9}\sqrt{-1} \Rightarrow r = 0 \pm 3i$

$$y_g = e^{0x}\left(c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)\right)$$

چون $\beta = 3$ ، $\beta i = 3i$ برابر با ریشه معادله مشخصه است از حالت دوم استفاده می‌کنیم

$$y_p = x\left(A_1 \sin 3x + A_2 \cos 3x\right)$$

$$y_p' = A_1 \sin(3x) + A_2 \cos(3x) + 3A_1 x \cos 3x - 3A_2 x \sin 3x$$

$$y_p' = (A_1 - 3A_2 x)\sin 3x + (A_2 + 3A_1 x)\cos 3x$$

$$y_p'' = -3A_2 \sin 3x + (3A_1 - 9A_2 x)\cos 3x + 3A_1 \cos 3x + (-3A_2 - 9A_1 x)\sin 3x$$

$$y_p'' = (-6A_2 - 9A_1 x)\sin 3x + (6A_1 - 9A_2 x)\cos 3x$$

$$(-6A_2 - \cancel{9A_1 x})\sin 3x + (6A_1 - \cancel{9A_2 x})\cos 3x + \cancel{9A_1 x}\sin 3x + \cancel{9A_2 x}\cos 3x = \sin 3x - \cos 3x$$

$$-6A_2 \sin 3x + 6A_1 \cos 3x = \sin 3x - \cos 3x$$

$$\begin{cases} -6A_2 = 1 \Rightarrow A_2 = -\frac{1}{6} \\ 6A_1 = -1 \Rightarrow A_1 = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$y_p = -\frac{1}{6} x \sin 3x - \frac{1}{6} x \cos 3x$$

$$y = y_g + y_p = c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x) - \frac{1}{6} x \sin 3x - \frac{1}{6} x \cos 3x$$

ص۴۴

۴- اگر $f(x) = p(x)\, e^{\alpha x}$ بصورت حاصلضرب یک چند جمله‌ای درجه n بصورت $p(x)$ در نمایی باشد آنگاه

اگر α ریشه معادله مشخصه نباشد
$$y_p = (A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n)\, e^{\alpha x}$$

اگر α ریشه معادله مشخصه با مرتبه تکرار t باشد
$$y_p = x^t (A_0 + A_1 x + \cdots + A_n x^n)\, e^{\alpha x}$$

مثال:
$$y'' - y = x e^{2x}$$

حل: $r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1$

$$y_g = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$$

چون $\alpha = 2$ برابر با ریشه معادله مشخصه نیست از حالت اول استفاده می‌کنیم

$$y_p = (A_0 + A_1 x)\, e^{2x}$$

$$y_p' = A_1 e^{2x} + (2A_0 + 2A_1 x)e^{2x} = (A_1 + 2A_0 + 2A_1 x)e^{2x}$$

$$y_p'' = 2A_1 e^{2x} + (2A_1 + 4A_0 + 4A_1 x)e^{2x} = (4A_1 + 4A_0 + 4A_1 x)e^{2x}$$

$$(4A_1 + 4A_0 + 4A_1 x)e^{2x} - (A_0 + A_1 x)e^{2x} = x e^{2x}$$

$$\begin{cases} 4A_1 + 3A_0 = 0 & \rightarrow A_0 = -\frac{4}{9} \\ 3A_1 = 1 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{3} & \end{cases}$$

$$y_p = \left(-\frac{4}{9} + \frac{1}{3}x\right)e^{2x}$$

$$y = y_g + y_p = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + \left(-\tfrac{4}{9} + \tfrac{1}{3}x\right)e^{2x}$$

ص ۴۵

مثال:

$$y''-y'=xe^x$$

حل: $r^2-r=0 \to r(r-1)=0 \rightarrow r=1,\ r=0$

$$\boxed{y_g=c_1+c_2e^x}$$

چون $\alpha=1$ برابر یکی از ریشه های معادله است لذا از روش دوم استفاده می کنیم

$$y_p=x(A_0+A_1x)e^x=(A_0x+A_1x^2)e^x$$

$$y'_p=(A_0+2A_1x+A_0x+A_1x^2)e^x$$

$$y''_p=(\underline{2A_1}+\underline{A_0}+\underline{\underline{2A_1x}}+\underline{A_0}+\underline{\underline{2A_1x}}+\underline{\underline{A_0x}}+A_1x^2)e^x$$

$$y''_p=(2A_1+2A_0+4A_1x+A_0x+A_1x^2)e^x$$

$$(2A_1+2A_0+\underline{(4A_1+A_0)x}+\cancel{A_1x^2})e^x-(A_0+\underline{2A_1x+A_0x}+\cancel{A_1x^2})e^x=xe^x$$

$$((2A_1+A_0)+(2A_1x))e^x=xe^x$$

$$\begin{cases} 2A_1+A_0=0 \rightarrow A_0=-1 \\ 2A_1=1 \Rightarrow A_1=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{y_p=\left(-x+\frac{1}{2}x^2\right)e^x}$$

$$y=y_g+y_p=c_1+c_2e^x+\left(-x+\tfrac{1}{2}x^2\right)e^x$$

ص۴۷

اگر $f(x)=\underbrace{p(x)}_{m}\sin\beta x+\underbrace{q(x)}_{n}\cos\beta x$ حاصلضرب چندجمله‌ای‌های از درجه m و n مشخص باشد آنگاه

اگر βi ریشه‌های معادله مشخصه نباشد

$$y_p=(A_0+A_1x+\dots+A_sx^s)\cos\beta x+(B_0+B_1x+\dots+B_sx^s)\sin(\beta x)$$

$$s=\max\{m,n\}$$

اگر βi ریشه‌های معادله مشخصه با مرتبه تکرار t باشد

$$y_p=x^t\left[(A_0+A_1x+\dots+A_sx^s)\cos\beta x+(B_0+B_1x+\dots+B_sx^s)\sin(\beta x)\right]$$

$$s=\max\{m,n\}$$

مثال:

$$y''-y=x\sin x$$

حل: $r^2-1=0\to r=\pm1$

$$y_g=c_1e^x+c_2e^{-x}$$

$$y_p=(A_0+A_1x)\cos x+(B_0+B_1x)\sin x$$

$$y_p'=A_1\cos x-(A_0+A_1x)\sin x+B_1\sin x+(B_0+B_1x)\cos x$$

$$y_p''=-A_1\sin x-A_1\sin x-(A_0+A_1x)\cos x+B_1\cos x+B_1\cos x-(B_0+B_1x)\sin x$$

$$(-2A_1-2B_0)\sin x+(2B_1-2A_0)\cos x-2A_1x\cos x-2B_1x\sin x=x\sin x$$

$$-2B_1=1\to B_1=-1/2$$

$$2A_1=0\to A_1=0$$

$$2B_1-2A_0=0\to A_0=-1/2$$

$$-2A_1-2B_0=0\to B_0=0$$

$$y_p=-1/2\cos x-1/2\,x\sin x$$

$$y=y_g+y_p=c_1e^x+c_2e^{-x}-1/2\cos x-1/2\,x\sin x$$

علیرضا اکبر ص ۴۷

۶ـ اگر $f(x) = k_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + k_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$ حاصلضرب نمایی در مثلثاتی باشد که k_1, k_2 عددی معلوم هست

اگر $\alpha \pm \beta i$ ریشه معادله مشخصه نباشد $\qquad y_p = A_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + A_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$

اگر $\alpha \pm \beta i$ ریشه معادله مشخصه با مرتبه تکرار t باشد $\qquad y_p = x^t\left(A_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + A_2 e^{\alpha x}\sin\beta x\right)$

مثال: معادله با مقدار اولیه $y(0)=0$ و $y'(0)=0$ را بیابید

$$y'' - 5y' + 6y = e^x \sin x$$

$$\text{ح}: \quad r^2 - 5r + 6 = 0 \rightarrow (r-3)(r-2) = 0 \rightarrow r=3,\ r=2 \qquad y_g = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$$

$$y_p = A_1 e^x \cos x + A_2 e^x \sin x \rightarrow y_p' = A_1 e^x \cos x - A_1 e^x \sin x + A_2 e^x \sin x + A_2 e^x \cos x$$

$$y_p'' = A_1 e^x \cos x - A_1 e^x \sin x - A_1 e^x \sin x - A_1 e^x \cos x + A_2 e^x \sin x + A_2 e^x \cos x + A_2 e^x \cos x - A_2 e^x \sin x$$

$$\left((A_2 + 3A_1)\sin x + (A - 3A_2)\cos x\right) e^x = e^x \sin x + 0$$

$$3\begin{cases} A_2 + 3A_1 = 1 \\ -3A_2 + A_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3A_2 + 9A_1 = 3 \\ -3A_2 + A_1 = 0 \end{cases} \qquad A_1 = \frac{3}{10} \qquad A_2 = \frac{1}{10}$$

$$y_p = \frac{3}{10} e^x \cos x + \frac{1}{10} e^x \sin x$$

$$\boxed{y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + \frac{3}{10} e^x \cos x + \frac{1}{10} e^x \sin x}$$ جواب عمومی

$$y' = 3c_1 e^{3x} + 2c_2 e^{2x} + \frac{3}{10} e^x \cos x - \frac{3}{10} e^x \sin x + \frac{1}{10} e^x \sin x + \frac{1}{10} e^x \cos x$$

$$y(0)=0 \rightarrow \quad 0 = c_1 + c_2 + \frac{3}{10} + 0$$

$$y'(0)=0 \rightarrow \quad 0 = 3c_1 + 2c_2 + \frac{3}{10} - 0 + 0 + \frac{1}{10}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -\frac{3}{10} \\ 3c_1 + 2c_2 = -\frac{4}{10} \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{1}{5} \qquad c_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{5} e^{3x} - \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{3}{10} e^x \cos x + \frac{1}{10} e^x \sin x}$$ جواب خصوصی

ب) روش عملگر D

روش حل به اینصورت می‌باشد که

$$\frac{d}{dx} = D \qquad \frac{d^2}{dx^2} = D^2, \dots, \quad \frac{d^n}{dx^n} = D^n$$

$$\frac{dy}{dx} = Dy \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = D^2y, \dots, \quad \frac{d^ny}{dx^n} = D^ny$$

معادله مورد نظر را به صورت

$$L(D)y = f(x) \qquad : L(D) = (a_nD^n + \dots + a_1D + a_0)$$

$L(D)$ را یک عملگر خطی می‌نامیم و تا حد امکان به صورت زیر تجزیه می‌کنیم

$$L(D) = (D - r_1)(D - r_2)\dots(D - r_n)$$

در آن r_i ها ریشه‌های معادله مفسر هستند که یا ثابت حقیقی‌اند یا مختلط.

برای یافتن جواب خصوصی به کمک اپراتورها از روش زیر استفاده خواهیم کرد.

$$[(D - r_1)\underbrace{(D - r_2)(D - r_3)\dots(D - r_n)]y}_{z_1} = f(x)$$

$$(D - r_1)z_1 = f(x) \Rightarrow Dz_1 - r_1z_1 = f(x) \Rightarrow z_1' - r_1z_1 = f(x)$$

$$\Rightarrow z_1 = e^{r_1x}\int f(x)e^{-r_1x}dx$$

$$(D - r_2)\underbrace{(D - r_3)\dots(D - r_n)y}_{z_2} = z_1 \Rightarrow z_2 = e^{r_2x}\int z_1 e^{-r_2x}dx$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow y_p = e^{r_nx}\int z_{n-1}e^{-r_nx}dx$$

ص ۴۹

مثال: به روش عملگر D حل کنید

$$y'' + 3y' + 2y = e^{4x}$$

حل: $r^2 + 3r + 2 = 0 \rightarrow (r+1)(r+2) = 0 \rightarrow r = -1 ,\ r = -2$

$$y_g = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

$$(D^2 + 3D + 2)y = e^{4x} \Rightarrow (D+1)\underbrace{(D+2)y}_{z_1} = e^{4x}$$

$$\Rightarrow (D+1)z_1 = e^{4x} \Rightarrow Dz_1 + z_1 = e^{4x} \Rightarrow z_1' + z_1 = e^{4x}$$

$$z_1 = e^{-x}\int e^{4x} e^{x}\,dx = e^{-x}\int e^{5x}\,dx \Rightarrow z_1 = \frac{e^{4x}}{5}$$

$$(D+2)y = \frac{e^{4x}}{5} \Rightarrow Dy + 2y = \frac{e^{4x}}{5} \Rightarrow y' + 2y = \frac{e^{4x}}{5}$$

$$y_p = e^{-2x}\int \frac{e^{4x}}{5} e^{2x}\,dx = e^{-2x}\int \frac{e^{6x}}{5}\,dx$$

$$= e^{-2x}\,\frac{e^{6x}}{30}$$

$$= \frac{e^{4x}}{30}$$

$$\boxed{y_p = \frac{e^{4x}}{30}}$$

$$y = y_g + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{e^{4x}}{30}$$

ص ۵۰

ج) روش عملگر اپراتور معکوس

$$D^{-1} = \frac{1}{D} = \int$$

مثال:

$$D^{-3}(x) = ?$$

حل:

$$D^{-3}(x) = D^{-2}D^{-1}(x) = D^{-2}\int x\,dx = D^{-2}\left(\frac{x^2}{2} + c_1\right)$$

$$= D^{-1}D^{-1}\left(\frac{x^2}{2} + c_1\right) = D^{-1}\int\left(\frac{x^2}{2} + c_1\right)dx$$

$$= D^{-1}\left(\frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2\right) = \int\left(\frac{x^3}{6} + c_1 x + c_2\right)dx$$

$$= \frac{x^4}{24} + c_1\frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

$$D^{-1}(\sin x) = \int \sin x\,dx = -\cos x + c$$

قضیه: اگر α ثابت باشد آنگاه

$$L(D)e^{\alpha x} = L(\alpha)\,e^{\alpha x}$$

مثال:

$$(6D^2 + 3D + 1)e^{3x} = ?$$

حل:

$$(6(3)^2 + 3(3) + 1)e^{3x} = 64\,e^{3x}$$

قضیه: اگر α ثابت باشد و $v(x)$ تابعی برحسب x باشد آنگاه

$$L(D)\left(e^{\alpha x}v(x)\right) = e^{\alpha x}L(D+\alpha)\,v(x)$$

منظور از $v(x)$ توابعی مانند چندجمله‌ای یا مثلثاتی هستند

علیرضا لشگری ص ۱۵

مثال:

$$(D^2-4D-1)(e^{2x}x^3) = e^{2x}\left((D+2)^2-4(D+2)+1\right)x^3$$

$$= e^{2x}(D^2+4D+4-4D-8+1)x^3$$

$$= e^{2x}(D^2-3)x^3$$

$$= e^{2x}(6x-3x^3)$$

قضیه: اگر β ثابت باشد

$$L(D^2)\sin\beta x = L(-\beta^2)\sin\beta x$$

$$L(D^2)\cos\beta x = L(-\beta^2)\cos\beta x$$

مثال:

$$(D^4+3D^2+1)\sin 2x = ?$$

$$(D^4+3D^2+1)\sin 2x = \left((D^2)^2+3D^2+1\right)\sin 2x$$

$$= \left((-2^2)^2+3(-2^2)+1\right)\sin 2x$$

$$= (16-12+1)\sin 2x$$

$$= 4\sin 2x$$

در صورتیکه D توان فرد داشته باشد در صورت و مخرج ضرب می‌کنیم تا توان زوج ظاهر شود.

روش عملگر معکوس: اگر $L(D)$ یک چند جمله‌ای اپراتوری یا عملگری باشد معکوس $L(D)$ را با $L^{-1}(D)$ یا $\frac{1}{L(D)}$ نمایش می‌دهند

(I) $L(D)y = f(x) \Rightarrow y = \frac{1}{L(D)} f(x)$

ص ۵۲

حالت های ممکن معادله (I)

الف) اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای از x باشد آنگاه $L(D)$ را تکمیل داده و تا حد ممکن تجزیه کرده و پس از تفکیک کسر از اطلاعات ریاضی ۱ برای حل آنها کمک می گیریم

$$1+D+D^2+D^3+\cdots+D^n = \frac{1-D^{n+1}}{1-D}$$

$$\frac{1}{1-D} f(x) = (1+D+D^2+\cdots+D^n) f(x)$$

$$\frac{1}{1+D} f(x) = (1-D+D^2-D^3+\cdots+D^n) f(x)$$

مثال:

$$y''' + 2y'' = 5x^3 + 7$$

به روش عملگر معکوس بیابید

$$r^3+2r^2=0 \Rightarrow r^2(r+2)=0 \rightarrow r_1=r_2=0, \quad r_3=-2$$

$$y_g = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-2x}$$

$$(D^3+2D^2)y = 5x^3+7 \Rightarrow y_p = \frac{1}{D^2(D+2)}(5x^3+7)$$

$$y_p = D^{-2}\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+D/2}(5x^3+7)\right) = D^{-2}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{D}{2}+\frac{D^2}{4}-\frac{D^3}{8}\right)(5x^3-7)\right]$$

$$= D^{-2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{D}{4}+\frac{D^2}{8}-\frac{D^3}{16}\right)(5x^3-7)\right]$$

$$= D^{-2}\left[\frac{5}{2}x^3-\frac{7}{2}-\frac{15x^2}{4}+\frac{15x}{4}-\frac{30}{16}\right] = D^{-1}\left(\frac{5x^4}{8}-\frac{7}{2}x-\frac{15x^3}{12}+\frac{15x^2}{8}-\frac{30}{16}x\right)$$

$$y_p = \frac{1}{8}x^5 - \frac{5}{16}x^4 + \frac{5}{8}x^3 - \frac{43}{16}x^2 \qquad y = y_g + y_p$$

ب) اگر $L(D)y=f(x)$ که در آن $f(x)$ یک تابع نمایی باشد آنگاه اگر

$$f(x) = Ae^{\alpha x} \quad و \quad L(\alpha) \neq 0$$

یعنی α ریشه معادله مفسر نباشد

جواب خصوصی بصورت $y_p = \dfrac{Ae^{\alpha x}}{L(\alpha)}$ خواهد بود

مثال:

$$y'' + y' + y = 2e^{-x}$$

حل: $r^2+r+1=0 \longrightarrow r = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$y_g = e^{-\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$$(D^2+D+1)y = 2e^{-x} \Rightarrow y_p = \frac{2e^{-x}}{D^2+D+1} = \frac{2e^{-x}}{(-1)^2-1+1} = 2e^{-x}$$

$$y_p = 2e^{2x}$$

$$y = y_g + y_p$$

ج) اگر $f(x)$ یک تابع مثلثاتی باشد اگر

$$L(D^2)y = k \sin \beta x$$

$$L(D^2)y = k \cos \beta x$$

و $L(-\beta^2) \neq 0$ یعنی ریشه معادله مفسر نباشد آنگاه جواب خصوصی بصورت زیر می‌باشد.

برای $\sin \beta x$ $\Rightarrow y_p = \dfrac{k \sin \beta x}{L(-\beta^2)}$

برای $\cos \beta x$ $\Rightarrow y_p = \dfrac{k \cos \beta x}{L(-\beta^2)}$

در صورتیکه توان D فرد باشد در مزدوج ضرب کرده تا توان زوج حاصل شود.

مثال

$$y'' + y' - 2y = \cos 2x$$

$$\text{م.م}: \quad r^2 + r - 2 = 0 \longrightarrow (r+2)(r-1) = 0 \begin{cases} r = -2 \\ r = 1 \end{cases}$$

$$y_g = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{x}$$

$$(D^2 + D - 2)\,y = \cos 2x \Rightarrow y_p = \frac{1}{D^2 + D - 2} \cos 2x$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{1}{(-2)^2 + D - 2} \cos 2x$$

$$= \frac{1}{D - 6} \cos 2x$$

$$= \frac{1}{D-6} \times \frac{D+6}{D+6} \cos 2x$$

$$= (D+6) \frac{1}{D^2 - 36} \cos 2x$$

$$= (D+6) \frac{1}{(-2^2) - 36} \cos 2x$$

$$= (D+6) \frac{\cos 2x}{-40}$$

$$= \frac{\sin 2x}{20} - \frac{3}{20} \cos 2x$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{\sin 2x}{20} - \frac{3}{20} \cos 2x$$

$$y = y_g + y_p$$

د) اگر $f(x)$ بصورت تابع نمایی در تابع دیگر (چندجمله‌ای، مثلثاتی) باشد:

$$L(D)y = e^{\alpha x} g(x) \Rightarrow y_p = e^{\alpha x} \frac{1}{L(D+\alpha)} g(x)$$

مثال:

$$y'' - 5y' + 6y = e^{4x} \sin 3x$$

حل:

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \rightarrow (r-2)(r-3) = 0 \rightarrow r=2,\ r=3 \qquad y_g = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

$$(D^2 - 5D + 6)y = e^{4x} \sin 3x \Rightarrow y_p = e^{4x} \frac{1}{(D+4-2)(D+4-3)} \sin 3x$$

$$\Rightarrow y_p = e^{4x} \frac{1}{D^2 + 3D + 2} \sin 3x$$

$$= e^{4x} \frac{1}{(-3^2) + 3D + 2} \sin 3x$$

$$= e^{4x} \frac{1}{3D - 7} \sin 3x$$

$$= e^{4x} \frac{3D + 7}{9D^2 - 49} \sin 3x$$

$$= e^{4x} \frac{(3D+7) \sin 3x}{9(-3^2) - 49} = \frac{e^{4x}}{-130} (9 \cos 3x + 7 \sin 3x)$$

$$y_p = \frac{e^{4x}}{-130} (9 \cos 3x + 7 \sin 3x)$$

$$y = y_g + y_p$$

س) اگر $L(\alpha)=0$ و $L(D)y=Ae^{\alpha x}$ آنگاه

$$L(D)=(D-\alpha)^{s}g(D) \longrightarrow y_p=\frac{Ae^{\alpha x}x^{s}}{s!\,g(\alpha)}$$

مثال:

$$y''-5y'+6y=e^{3x}$$

حل: $r^2-5r+6=0 \longrightarrow (r-3)(r-2)=0 \longrightarrow r=3,\ r=2$ $\quad \boxed{y_g=c_1e^{3x}+c_2e^{2x}}$

$$L(D)=(D-3)^{1\to s}\underbrace{(D-2)}_{g(D)}$$

$$y=y_g+y_p$$

$$y_p=\frac{1e^{3x}x^{1}}{1!\,(3-2)}=xe^{3x} \longrightarrow \boxed{y_p=xe^{3x}}$$

ش) اگر $L(D^2)y=K\cos\beta x$ و $L(D^2)y=K\sin\beta x$

که در آن $L(-\beta^2)=0$ یا $L(\beta i)=0$ در این صورت

$$y_p=\frac{Kx^{s}}{s!\,g(\beta i)}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$$

تذکر: اگر در تابع $L(D)y=f(x)$ ، $f(x)$ برحسب sin و cos باشد کل y_p جزء جواب محسوب می‌شود، اگر برحسب sin باشد قسمت موهومی جزء جواب خواهد بود

اگر برحسب cos باشد قسمت حقیقی جزء جواب خواهد بود.

در مثال‌ها این مطلب را خواهید دید.

مثال :

$$y'' + 9y = 2\sin 3x$$

حل: $r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r = \pm 3i \rightarrow \boxed{y_g = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x}$

$$L(D) = \underbrace{(D - 3i)}_{0}\underbrace{(D + 3i)}_{g(D)}$$

$$y_p = \frac{2 \times x^1}{1!\, 6i}(\cos 3x + i\sin 3x)$$

$$y = y_g + y_p$$

$$= \frac{xi}{-3}(\cos 3x + i\sin 3x)$$

$$y_p = \frac{x}{-3}\, i \cos 3x + \frac{x}{3}\sin 3x \Rightarrow \boxed{y_p = \frac{x}{-3}\cos 3x}$$

قسمت موهومی جواب است

مثال

$$y'' + 9y = 2\cos 3x$$

حل: $r^2 + 9 = 0 \rightarrow r = \pm 3i \qquad \boxed{y_g = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x}$

$$L(D) = (D - 3i)(D + 3i)$$

$$y_p = \frac{2 \times x^1}{1!\, 6i}(\cos 3x + i\sin 3x)$$

$$= \frac{xi}{-3}(\cos 3x + i\sin 3x)$$

$$y_p = \frac{x}{-3}\, i\cos 3x + \frac{x}{3}\sin 3x \Rightarrow \boxed{y_p = \frac{x}{3}\sin 3x}$$

قسمت حقیقی جواب است

$$y = y_g + y_p$$

تذکر: $i^2 = i\,i = -1$

ص ۵۸

هـ) حل معادلاتی که در آن $f(x)$ بصورت مجموعی از توابع چندجمله‌ای، نمایی و مثلثاتی باشد تک تک محاسبه کرده و با هم جمع می‌کنیم.

مثال:

$$y'' + 4y = x^2 + x + 2\sin x + e^{-2x}$$

حل:

$$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i \Rightarrow y_g = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

$$y_{p_1} = \frac{1}{4+D^2}(x^2+x) = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1+\left(\frac{D}{2}\right)^2}(x^2+x) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{D^2}{4}\right)(x^2+x)$$

$$y_{p_1} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$$

$$y_{p_2} = \frac{1}{4+D^2}\,2\sin x = \frac{2\sin x}{4+(-1^2)} = \frac{2}{3}\sin x$$

$$y_{p_2} = 2/3 \sin x$$

$$y_{p_3} = \frac{e^{-2x}}{4+D^2} = \frac{e^{-2x}}{4+(-2)^2} = \frac{1}{8}e^{-2x}$$

$$y_{p_3} = \frac{1}{8}e^{-2x}$$

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3} \Rightarrow y_p = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} + \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{8}e^{-2x}$$

$$y = y_g + y_p$$

۵) اگر $L(D)y = x\,u(x)$

$$y_p = \frac{1}{L(D)}\,x\,u(x) \Rightarrow y_p = x\,\frac{1}{L(D)}\,u(x) - \frac{L'(D)}{(L(D))^2}\,u(x)$$

مثال:

$$y'' - y = x\sin x$$

حل: $r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1 \rightarrow y_g = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$

$$y_p = \frac{1}{D^2-1}\,x\sin x \Rightarrow y_p = x\,\frac{1}{D^2-1}\sin x - \frac{2D}{(D^2-1)^2}\sin x$$

$$\Rightarrow y_p = x\,\frac{1}{(-1^2)-1}\sin x - \frac{2D}{((-1^2)-1)^2}\sin x = \frac{x\sin x}{-2} - \frac{1}{2}D(\sin x)$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{x\sin x}{-2} - \frac{1}{2}\cos x \qquad y = y_g + y_p$$

مثال:

$$y'' - y = x e^{2x}$$

حل: $r^2 - 1 = 0 \rightarrow r = \pm 1 \rightarrow y_g = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$

$$y_p = \frac{1}{D^2-1}\,x e^{2x} \Rightarrow y_p = x\,\frac{1}{D^2-1}e^{2x} - \frac{2D}{(D^2-1)^2}e^{2x}$$

$$\Rightarrow y_p = x\,\frac{1}{4-1}e^{2x} - \frac{2D}{(4-1)^2}(e^{2x}) \Rightarrow y_p = \frac{x e^{2x}}{3} - \frac{2}{9}D(e^{2x})$$

$$\Rightarrow y_p = \frac{x e^{2x}}{3} - \frac{4}{9}e^{2x} \qquad y = y_g + y_p$$

معادلات کوشی (کشی) اویلر:

صورت کلی این معادلات بفرم $a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x^1 y' + a_0 y = f(x)$

است که توان x برابر با مرتبه y (مشتق) است که در آن به ازای هر $x>0$ از تغییر متغیرهای زیر استفاده می کنیم

$$\begin{cases} x = e^t \\ \ln x = t \end{cases} \rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{1}{x} \qquad D = \frac{d}{dt}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} Dy \xrightarrow{\times x} x\frac{dy}{dx} = Dy$$

$$\Rightarrow xy' = Dy \Rightarrow xy' = x\frac{dy}{dx} = Dy$$

$$\Rightarrow x^2 y'' = x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$$

$$\Rightarrow x^3 y''' = x^3 \frac{d^3y}{dx^3} = D(D-1)(D-2)y$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow x^n y^{(n)} = x^n \frac{d^n y}{dx^n} = D(D-1)(D-2)\cdots(D-n+1)y$$

مثال:

$$x^3 y''' + xy' - y = 0$$

حل: $D(D-1)(D-2)y + Dy - y = 0 \rightarrow (D-1)^3 y = 0 \rightarrow (r-1)^3 = 0 \rightarrow r_1 = r_2 = r_3 = 1$

$$y_g = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t} + c_3 t^2 e^{r_3 t}$$

$$y_g = c_1 e^{1\ln x} + c_2 \ln x \, e^{1\ln x} + c_3 (\ln x)^2 e^{1\ln x}$$

$$y_g = c_1 x + c_2 x \ln x + c_3 x (\ln x)^2$$

ص ۴۱

لازم بذکر است در حالت کلی برای صورت داریم

$$r_1 \neq r_2 \neq r_3 \neq \cdots \neq r_n \rightarrow y_g = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + c_3 e^{r_3 t} + \cdots + c_n e^{r_n t}$$

$$r_1 = r_2 = r_3 = \cdots = r_n \rightarrow y_g = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t} + c_3 t^2 e^{r_1 t} + \cdots + c_n t^{n-1} e^{r_1 t}$$

$$r = \alpha \pm \beta i \rightarrow y_g = e^{\alpha t}(c_1 \cos t^{\beta} + c_2 \sin t^{\beta})$$

$$= x^{\alpha}(c_1 \cos \beta \ln x + c_2 \sin \beta \ln x)$$

مثال : $x^2 y'' + 3xy' + 2y = x^2 + x$

حل: $D(D-1)y + 3Dy + 2y = 0 \rightarrow r^2 + 2r + 2 = 0 \rightarrow r = -1 \pm i$

$$y_g = x^{-1}(c_1 \cos \ln x + c_2 \sin \ln x)$$

$$(D^2 + 2D + 2)y = e^{2t} + e^{t} \qquad x = e^{t} \rightarrow \ln x = t$$

$$y_{p_1} = \frac{e^{2t}}{D^2 + 2D + 2} = \frac{e^{2t}}{4+4+2} = \frac{e^{2t}}{10} = \frac{e^{2\ln x}}{10} = \frac{e^{\ln x^2}}{10} = \frac{x^2}{10}$$

$$y_{p_2} = \frac{e^{t}}{D^2 + 2D + 2} = \frac{e^{t}}{1+2+2} = \frac{e^{t}}{5} = \frac{e^{\ln x}}{5} = \frac{x}{5}$$

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} \Rightarrow y_p = \frac{x^2}{10} + \frac{x}{5}$$

$$y = y_g + y_p$$

در معادلات کشی اویلر از درجه دوم بفرم زیر می‌توان از روش تستی استفاده کرد

$$x^2y'' + axy' + by = f(x) \qquad \begin{cases} x = e^t \\ \ln x = t \end{cases}$$

$$y'' + (a-1)y' + by = f(e^t)$$

$$r^2 + (a-1)r + b = 0$$

معادله مفسر

$$\text{if } \Delta > 0 \quad r_1 \neq r_2 \rightarrow y_g = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$$

$$\text{if } \Delta = 0 \quad r_1 = r_2 \rightarrow y_g = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t} = c_1 x^{r_1} + c_2 (\ln x) x^{r_1}$$

$$\text{if } \Delta < 0 \quad r = \alpha \pm \beta i \rightarrow y_g = x^{\alpha}\left(c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x)\right)$$

مثال:

$$x^2y'' + xy' - y = 0$$

حل: $r^2 + (a-1)r + b = 0 \rightarrow r^2 + (1-1)r - 1 = 0 \rightarrow r^2 - 1 = 0 \rightarrow r = \pm 1$

$$y_g = c_1 x^1 + c_2 x^{-1}$$

$$x^2y'' - xy' + y = 0$$

حل: $r^2 + (-1-1)r + 1 = 0 \rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0 \rightarrow (r-1)^2 = 0 \rightarrow r_1 = r_2 = 1$

$$y_g = c_1 x^1 + c_2 x^1 (\ln x)$$

$$x^2y'' + xy' + y = 0$$

حل: $r^2 + (1-1)r + 1 = 0 \rightarrow r^2 + 1 = 0 \rightarrow r = \pm i = 0 \pm 1i$

$$y_g = x^0 \left(c_1 \cos \ln x + c_2 \sin \ln x \right)$$

معادله خطی مرتبه دوم با فرض داشتن یک جواب معادله همگن متناظر

1) فرض کنید y_1 یک جواب معادله همگن متناظر و معادله زیر بصورت مرتبه دوم باشد

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = f_3(x) \quad \text{(I)}$$

جواب عمومی معادله را بفرم $y = u(x)y_1$ در نظر میگیریم و $u(x)$ را از فرمول زیر محاسبه میکنیم

$$p' + p\left(\frac{2y_1'}{y_1} + f_1(x)\right) = \frac{f_3(x)}{y_1}$$

که در آن $u'(x) = p$ باشد.

2) اگر معادله (I) همگن باشد یعنی $y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = 0$ آنگاه $u(x)$ را میتوان از رابطه زیر بدست آورد:

$$u(x) = \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int f_1(x)\,dx} dx$$

مثال: معادله دیفرانسیل مقابل با داشتن جواب $y_1 = x$ را حل کنید. $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$

حل:
$$y'' + \frac{2x}{1-x^2}y' - \frac{2}{1-x^2}y = 0$$

$$u(x) = \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2x}{x^2-1}dx} dx = \int \frac{1}{x^2} e^{\ln(x^2-1)} dx = \int \frac{x^2-1}{x^2} dx$$

$$= \int dx - \int x^{-2} dx = x - \frac{x^{-1}}{-1} = x + \frac{1}{x}$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 u(x)$$

$$y = c_1 x + c_2\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

مثال:

$$y'' + y = \csc x \rightsquigarrow y'' + y = \frac{1}{\sin x}$$

حل: $r^2 + 1 = 0 \to r = \pm i \to y_g = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

$y_1 = \cos x \to y_1' = -\sin x$ $\qquad w = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$y_2 = \sin x \to y_2' = \cos x$

$$y_p = -\cos x \int \frac{\frac{1}{\sin x} \times \sin x}{1} dx + \sin x \int \frac{\frac{1}{\sin x} \cos x}{1} dx$$

$$y_p = -x \cos x + \sin x \ln(\sin x)$$

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x}$$

حل: $r^2 - 4r + 4 = 0 \to (r-2)^2 = 0 \to r_1 = r_2 = 2$

$$y_g = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

$y_1 = e^{2x} \to y_1' = 2e^{2x}$ $\qquad w = e^{4x} + 2xe^{4x} - 2xe^{4x} = e^{4x}$

$y_2 = xe^{2x} \to y_2' = e^{2x} + 2xe^{2x}$

$$y_p = -e^{2x} \int \frac{\frac{e^{2x}}{x} xe^{2x}}{e^{4x}} dx + xe^{2x} \int \frac{\frac{e^{2x}}{x} e^{2x}}{e^{4x}} dx$$

$$y_p = -xe^{2x} + x \ln x \, e^{2x}$$

$$y = y_g + y_p$$

در حالت های زیر می توان y_1 را تعیین کرد

① $f_1(x) + x f_2(x) = 0 \rightarrow y_1 = x$

مثال قبلی $\frac{2x}{1-x^2} + x \frac{2}{1-x^2} = 0 \rightarrow y_1 = x$

② $a^2 + a f_1(x) + f_2(x) = 0 \Rightarrow y_1 = e^{ax}$

مثلاً
$$\begin{cases} a=1 \Rightarrow 1 + f_1(x) + f_2(x) = 0 \rightarrow y_1 = e^{x} \\ a=-1 \Rightarrow 1 - f_1(x) + f_2(x) = 0 \rightarrow y_1 = e^{-x} \end{cases}$$

اگر در معادله با ضرایب ثابت طرف دوم معادله غیرهمگن جزء حالت هایی که در قسمت های قبلی درس نباشد جواب خصوصی از رابطه زیر بدست می آید.

$$y'' + f_1(x) y' + f_2(x) y = f_3(x)$$

$$y_p = -y_1 \int \frac{f_3(x) y_2}{w} dx + y_2 \int \frac{f_3(x) y_1}{w} dx$$

$$r_1 \neq r_2 \rightarrow y_g = c_1 \underbrace{e^{r_1 x}}_{y_1} + c_2 \underbrace{e^{r_2 x}}_{y_2}$$

$$r_1 = r_2 \rightarrow y_g = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_2 x}$$

$$r = \alpha \pm \beta i \rightarrow y_g = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \cos \beta x)$$
$$= c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$w = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ یا $w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

علیرضا اکبر ص ۳۵